1. Предел и непрерывность функций одной и нескольких переменных. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

*Рассмотрим ф-ю y=f(x): {x}⊂ R→R, т. a: в ∀ Uε(a) имеются точки {x}, отличные от a.*

*Опр Число b называется предельным значением ф-ии y=f(x) в точке х=а (или пределом ф-ии при х→а), если для ∀ сходящейся к а последовательности х1,х2,…,хп,… значений аргумента х, элементы хп которой отличны от а, соответствующая последовательность f(x1),…,f(xn),…значений функции сходится к b.*

*Аналогичным образом определяются прав. и лев. пред. знач. ф-ии.*



*Теорема f(x), g(x) на {x}, ⇒*

*⇒ , , *

*Опр Ф-я f(x) называется непрерывной в т. а, если *

*Теорема Пусть f(x), g(x) на {x} непр. в точке а ⇒ f(x)±g(x), f(x)⋅ g(x), f(x)/g(x) (g(a)≠ 0) непрерывны в т.а.*

*Пусть x=ϕ(t) на {t}, {x}-ее множество значений, y=f(x) на {x} ⇒ на {t} задана сложная ф-я y=f(x), где x=ϕ(t), или y=f[ϕ(t)]=F(t)*

*Теорема Если ф-я x=ϕ(t) непр в точке а, а ф-я y=f(x) непр в точке b=ϕ(a), то y=f[ϕ(t)]=F(t) непр в точке а.*

*Опр Число b называется предельным значением ф-ии f(x) в точке а, если ∀ε>0 ∃δ>0:*

*∀x: 0<|x-a|<δ ⇒ |f(x)-b|<ε*

*Опр Ф-я f(x) называется непрерывной в точке x=a, если ∀ε>0 ∃δ>0: ∀x: |x-a|<δ ⇒*

*⇒ |f(x) – f(a)|<ε*

*Опр f(x) удовлетворяет в т х=а условию Коши, если ∀ε>0 ∃δ>0: ∀x’,x”: 0<|x’-a|<δ,*

*0<|x”-a|<δ ⇒ |f(x’)-f(x”)|<ε*

*Теорема (Критерий Коши) удовлетворяет в точке а условию Коши*

*♦ ⇒ Пусть ,*

*⇒|f(x’)-b|<ε/2, |f(x”)-b|<ε/2⇒|f(x’)-f(x”)|≤|f(x’)-b|+|f(x”)-b|≤ε*

*⇐ Пусть {xn}→a и xn≠a*

*Фиксируем ∀ε>0, возьмем δ из условия Коши ⇒ ∃N: ∀n≥N 0<|xn-a|<δ ⇒ ∀p=1,2,…*

*0<|xn+p-a|<δ ⇒ по усл Коши |f(xn+p)-f(xn)|<ε ⇒ {f(xn)} явл-ся фундаментальной посл-ю ⇒ ⇒{f(xn)}→b*

*Пусть {xn}, {xn’}→a, xn≠a, xn’≠a, {f(xn)}→b, {f(xn’)}→b’. Докажем, что b=b’.*

*Рассмотрим посл-ть f(x1), f(x1’), f(x2), f(x2’),… - она сходится ⇒ ∀ ее подпосл-ть сходится к одному числу, включая {f(xn)}, {f(xn’)}⇒ b=b’.♦*

Свойства ф-й, непрерывных на отрезке

1. *Если f(x) непр в точке а, и f(a)≠0, то ∃δ-окрестность точки а: ∀x∈Uδ(a) f(x)≠0 u*

*sgn f(x)=sgn f(a)*

*♦ , т.е.*

*b-ε<f(x)<b+ε при a-δ<x<a+δ. Пусть ε<|b|⇒b-ε, b+ε, b – одного знака ⇒ всюду в Uδ(a) ф-я f(x) сохраняет знак числа b.♦*

1. *Пусть f(x) непр на [a, b] и sgn f(a)≠ sgn f(b) ⇒ ∃ξ∈(a, b): f(ξ)=0*

*♦ Пусть f(a)<0, f(b)>0. Рассмотрим мн-во {x}∈[a,b]: f(x)<0 ∀x∈{x}, a∈{x}, {x} ограничено сверху (числом b) ⇒ ∃ точная верхняя грань ξ . Она является внутренней точкой [a, b], т.к. ∃правая полуокрестность точки а, в которой f(x)<0 и левая полуокр-ть точки b, в которой f(x)>0. Докажем, что f(ξ)=0. Если это не так, то по свойству 1 ∃ Uδ(ξ), в которой f(x) имеет определенный знак, но это невозможно, т.к. ξ - точная верхняя грань. ♦*

1. *Пусть f(x) – непр на [a, b], f(a)=A, f(b)=B. Пусть C∈[A, B] ⇒ ∃ξ∈[a, b]: f(ξ)=C*

*♦ Пусть A≠B, C≠A, C≠B и пусть A<C<B Введем ϕ(x)=f(x)-C*

*ϕ(x) непр на [a, b], ϕ(a)<0, ϕ(b)>0 ⇒ ∃ξ∈[a, b]: ϕ(ξ)=0 ⇒ f(ξ)=C ♦*

1. *Если f(x) непр на [a, b] ⇒ f(x) огр на [a, b]*

*♦ Докажем, что f(x) огр сверху на [a, b]. Предположим обратное ⇒ ∀n=1,2,… ∃xn∈[a, b]: f(xn)>n. Таким образом, ∃{xn}: {f(xn)} – бесконечно большая. Т.к. {xn} – огр, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность {xkn}→ξ∈[a, b]. В силу непрерывности f(x) в точке ξ {f(xkn)}→f(ξ). Но это невозможно, т.к.∀ п/посл-ть б.б. посл-ти является б.б.♦*

1. *Пусть f(x) огр сверху (снизу). Число M (m) называют точной верхней (нижней) гранью ф-uи*

*f(x) на [a, b], если: 1) ∀x∈[a, b] f(x)≤M (f(x)≥m); 2)∀ε>0 ∃x∈[a, b]: f(x)>M-ε (f(x)<m+ε)*

**

*Теорема Если f(x) непр на [a, b], то она достигает на [a, b] своих точных верней и нижней граней*

*♦ Пусть f(x) не достигает т.верхней грани M, т.е. ∀x∈[a, b] f(x)<M*

*Рассмотрим . F(x) непр на [a, b] ⇒ огр, т.е.∃B>0: M не является точной верхней гранью.♦*

*Опр Ф-я f(x) называется равномерно непрерывной на {x}, если ∀ε>0 ∃δ>0: ∀x’,x”∈{x}: |x’-x”|<δ |f(x’)-f(x”)|<ε*

*Теорема Непрерывная на [a, b] ф-я f(x) равномерно непрерывна на [a, b]*

*♦ Предположим обратное: ∃ε>0: ∀δ>0 ∃x’,x”: |x”-x’|<δ |f(x”)-f(x’)|≥ε ⇒ Для δn=1/n ∃x’n ,x”n: |x”n - x’n|<1/n, но |f(x”n)-f(x’n)|≥ε (\*)*

*Из {x’n} можно выделить сходящуюся п/посл-ть {x’kn}→ c. Очевидно, п/посл-ть {x”kn}→ c.*

*Т.к. f(x) непр в точке с, то {f(x’kn)}→ f(c), {f(x”kn)}→ f(c) ⇒ {f(x”kn)-f(x’kn)} является бесконечно малой, что противоречит (\*). ♦*

*NB На неограниченном мн-ве это не так. Контрпример: y=x2*

2. Производная и дифференциал функций одной и нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости.

*Пусть ф-я y=f(x) определена на (a, b)*

*Опр Производной ф-ии y=f(x) в данной т. х называется предел, если предел сущ-ет.*

*Опр Ф-я y=f(x) называется дифференцируемой в данной точке х, если приращение Δy этой функции в т. х, соответствующее приращению Δх, может быть представлено в виде Δy=AΔx+αΔx, где А – const, не зависящая от Δх, α→0 при x→0.*

*Теорема Ф-я y=f(x) является дифференцируемой в точке х ⇔ f(x) имеет в точке х конечную производную.*

*♦⇒ Δy=AΔx+αΔx. Пусть Δх≠0 ⇒ Δx→0 ⇒ *

*⇐ Пусть функция  является беск малой при Δх→0, т.е. Δy=f’(x)Δx+αΔx, где ⇒ f(x) дифференцируемая.♦*

*Опр Дифференциалом ф-ии y=f(x) в точке х, соответствующим приращению Δх, называется главная линейная относительно Δх часть приращения этой ф-ии в точке х.dy=AΔx=f’(x)Δx dx – дифференциал независимой переменной х - ∀ число. Пусть dx=Δx ⇒*

*Теорема Пусть y=f(x) в окрестности точки х0 возрастает (убывает) и непрерывна.y=f(x) дифференцируема в х0 и f’(x0)≠0 ⇒ ∃x=f –1(y), которая дифференцируема в y0=f(x0) u x’(y0)=1/f’(x0)*

*♦ В у0 придадим аргументу у приращение Δу≠0, ему отвечает Δх≠0 (т.к. ф-я возрастает (убывает)) . Т.к. x=f –1(y) непр,то Δх→0.Но приΔх→0 ⇒♦*

*Теорема Пусть x=ϕ(t) дифф в точке t0 , а y=f(x) дифф в точке x0=ϕ(t0) ⇒ сложная ф-я y=f(ϕ(t)) дифф в точке t0 u [f(ϕ(t0))]’=f’(x0)ϕ(t0).*

*♦Δt → Δx → Δy Δy=f’(x0)Δx+αΔx, ; , Δt→0, т.к. х непр, то Δх→0 ⇒*

*⇒ .♦*

*Инвариантность формы 1 дифференциала dy=f’(x)dx не только в случае, когда х – независимая переменная*

*Пусть y=f(ϕ(t)), y’=f’(x)ϕ’(t)*

* *

*Теорема (Ролля) f(x)∈C[a, b] и дифф на [a, b], f(a)=f(b) ⇒ ∃ξ∈[a, b]: f’(ξ)=0*

*Теорема (Лагранжа)f(x)∈C[a, b] и дифф на [a, b] ⇒ ∃ξ∈[a, b]: f(b) - f(a)=f’(ξ)(b - a)*

***Функции n переменных***

*Опр Если ∃ предел частного приращения Δхкu в точке M(x1…xm)*

*, соответствующий приращению Δхк аргумента хк , при Δхк→0, то этот предел называется частной производной ф-ии u=f(x1…x­m) в точке М по аргументу хк , и обозначается .*

*Опр Ф-я u=f(x1…xm) называется дифференцируемой в данной точке M(x1…xm), если*

*Δu=A1Δx1+A2Δx2+…+AmΔxm+α1Δx1+…+αmΔxm или *

*A1Δx1+A2Δx2+…+AmΔxm – главная линейная отн-но приращений аргументов часть приращения дифференцируемой ф-ии (если A1…Am≠0 одновременно)*

*Теорема Если u=f(x1…xm) дифф-ма в точке М, то в этой точке ∃ частные производные по всем аргументам: , i=1…m ♦ ♦*

*Следствие: *

*Если u=f(x1…xm) дифф-ма в точке М, то она и непр в этой точке.*

*Теорема (достаточное условие дифф-ти) Если ф-я u=f(x1…xm) имеет частные производные по всем aргу-ментам в некоторой окрестности точки  и они непр в М0, то эта ф-я дифф-ма в точке М0.*

*♦ Рассмотрим случай u=f(x,y).Частные производные fx’ и fy’ ∃ в окрестности М0 и непр в М0.*

*Возьмем Δx, Δy: M(x0+Δx, y0+Δy) принадлежит указанной окрестности М0.*

*Δu = f(x0+Δx, y0+Δy) – f(x0, y0) = [f(x0+Δx, y0+Δy) – f(x0, y0+Δy)]+[ f(x0, y0+Δy) – f(x0, y0)] =*

*= fx’(x0+Θ1Δx, y0+Δy)Δx+fy’(x0, y0+Θ2Δy)Δy*

*В силу непрерывности производной в точке М0:fx’(x0+Θ1Δx, y0+Δy) = fx’(x0, y0)+α*

*fy’(x0, y0+Θ2Δy) = fy’(x0, y0)+β ; α ,β →0, Δx,Δy→0 ⇒ Δu = fx’(x0, y0)Δx+ fy’(x0, y0)Δy+αΔx+βΔy*

*Для n переменных теорема доказывается аналогично ♦*

*Опр Дифференциалом du ф-ии u=f(x1…xm), дифф-мой в точке М, называется главная линейная относительно приращений аргументов часть приращения этой ф-ии в точке М:*

# 3. Определенный интеграл и его свойства. Основная формула интегрального исчисления.

Пусть

* f(x) определена в каждой точке на [a,b]
* Разбиение T = {a = x0 < x1 < ... < xn = b}
* ξi ∈[xi-1, xi], Δxi = xi-1 - xi

Опр Число I{ xi , ξi } = f(ξ1)\*Δx1 + f(ξ2)\*Δx2 + ... + f(ξn)\*Δxn =  называется интегральной суммой функции f(x), соответсвующей данному разбиению T. Число 

называется диаметром разбиения T. •

Опр Число I называется пределом интегральной суммы I{ xi , ξi } при Δ → 0, если

∀ε > 0 ∃ δ > 0, что ∀ T : Δ < δ независимо от выбора ξi справедливо | I{ xi , ξi } - I | < ε. Конечный I называется определенным интегралом функции f(x) на [a,b]. •

Опр Функция f(x) называется интегрируемой на [a,b], если существует конечный I. •

Пусть f(x) ограничена на [a,b], то есть ∃

,



Определим

 (Верхняя интегральная сумма)

 (Нижняя интегральная сумма)

функции f(x) для данного разбиения T отрезка [a,b]. Очевидно, что .

Т ∀ фиксированного разбиения T, ∀ε > 0 ∃ ξi ∈[xi-1, xi]: .

Док-во По определению sup ∀i ∃ξi ∈[xi-1, xi]: на [xi-1, xi]. Умножим на  и просуммируем по i; получаем . •

Т ∀ фиксированного разбиения T, ∀ε > 0 ∃ ξi ∈[xi-1, xi]: .

Док-во Аналогично пред. •

Т Пусть разбиение T’ получено из T добавлением новых точек ⇒ .

Док-во Пусть T’ получено из T добавлением x’ на [xi-1, xi], M’ и M’’ - точные верхние грани на

[xi-1, x’] и [x’, xi]; Δ xi’ и Δ xi’’ - длины. Δ xi  = Δ xi’ + Δ xi’’, Mi’ <= Mi, Mi’’ <= Mi ⇒

S - S’ = MiΔ xi  - (Mi’Δ xi’ + Mi’’Δ xi’’) = (Mi - Mi’) Δ xi’ + (Mi - Mi’’) Δ xi’’ >= 0. •

Т Пусть T’, T’’ - ∀ разбиения отрезка [a,b] ⇒ 

Док-во Пусть T = T’ ∪ T’’ ⇒ .•

Т {S} - множество, ограниченное снизу, {s} - ограниченное сверху.

Док-во Следует из предыдущей теоремы. •

Опр называются верхней и нижней суммами Дарбу от f(x).

Т .

Док-во Пусть  ⇒. Из определения inf и sup ⇒ ∃:⇒⇒⇒противоречие. •

Т Пусть разбиение T’ получено из T добавлением p новых точек ⇒ .

Док-во Пусть была добавлена x’∈ [xi-1, xi], тогда =≤.•

Лемма Дарбу .

Док-во Докажем, что . Предположим, что M > m ( если M = m, то очевидно ).

∀ε > 0 ∃T\*: . Пусть р - число точек разбиения T\*, лежащих строго внутри [a,b]. Пусть T - любое разбиение [a,b]: . Добавим к нему точки разбиения T\*, лежащие строго внутри [a,b] и получим T’. Тогда для T’ .

C другой стороны, T’ = T\* ∪ T ⇒⇒. Таким образом, ∀ε > 0 ∃ δ > 0 (): ∀T : Δ < δ.•

Т Ограниченная на [a,b] функция f(x) интегрируема ⇔ ∀ε > 0 ∃ разбиение T: S - s < ε.

Док-во

|⇒| Пусть f(x) интегрируема на [a,b]. Пусть . Тогда ∀ε > 0 ∃ δ > 0: ∀T: Δ < δ

. Зафиксируем такое T. Для него существуют такие две интегральные суммы, что . Тогда .

|⇐| ∀T  и по условию теоремы ∀ε > 0 S - s < ε ⇒  ⇒ .

По лемме Дарбу I есть общий предел при Δ → 0 верхних и нижних интегральных сумм ⇒

∀ε > 0 ∃ δ > 0: ∀T: Δ < δ , то есть при Δ < δ справедливо S -s < ε, и s ≤ I ≤ S.

∀I{ xi , ξi } данного T s ≤ I{ xi , ξi } ≤ S ⇒ | I{ xi , ξi } - I | ≤ | S - s | ≤ ε ⇒ I есть предел интегральной суммы. •

Свойства определенных интегралов

1.

2.

3., если f(x) и g(x) интегрируемы на [a,b].

Док-во . Lim по правой части ⇒ lim по левой части. •

4. Пусть f,g интегрируемы на [a,b] ⇒ f\*g интегрируемы на [a,b].

Док-во |f|≤A, |g|≤B. Рассмотрим любое разбиение T отрезка [a,b]. Пусть х’,x’’ ∈ [xi-1, xi], тогда

f(x’’)g(x’’) - f(x’)g(x’) = [f(x’’) - f(x’)] g(x’’) + [g(x’’) - g(x’)] f(x’). Так как | f(x’’)g(x’’) - f(x’)g(x’)| ≤wi =

Mi - mi , | f(x’’) - f(x’)| ≤ wif, | g(x’’) - g(x’)| ≤ wig ⇒ wi ≤ Bwif + Awig ⇒ . Так как f и g интегрируемы, то ∀ε > 0 ∃T: .•

5. 

6. Пусть f интегрируема на [a,b] ⇒ f интегрируема на∀ [c,d] ⊂ [a,b].

Док-во ∀ε > 0 ∃T: S - s < ε. Положим T\* = T ∪ {c} ∪ {d} ⇒ для T\* тем более S - s < ε. Разбиение T\* отрезка [a,b] порождает разбиение T’ отрезка [c,d], для которого справедливо S’ - s’ ≤ S - s < ε.•

7. Если f интегрируема на [a,c] и [c,b] ⇒ f интегрируема на [a,b] и 

8. Пусть f интегрируема и неотрицательна на [a,b] ⇒.

9. Пусть f интегрируема, неотрицательна и отлична от нуля на [a,b] ⇒.

10. Пусть f,g интегрируемы на [a,b] и выполняется f≥g везде на [a,b] ⇒.

11. Пусть f интегрируема на [a,b] ⇒ |f| интегрируема на [a,b] и .

Док-во Докажем, что |f| интегрируема на [a,b]. Пусть Mi и m­i - точные верхние и нижние грани f(x) на [xi-1, xi], Mi‘и m­i‘ - точные верхние и нижние грани |f(x)| на [xi-1, xi]. Mi‘ - m­i‘ ≤ Mi - m­i ⇒ S’ - s’ ≤ S - s ⇒ S’ - s’ < ε. Так как -|f(x)| ≤ f(x) ≤ |f(x)| ⇒ .•

12. Пусть f,g интегрируемы на [a,b], g≥0, M и m - точные верхняя и нижняя грани f(x) на [a,b] ⇒

.

13. Пусть f,g интегрируемы на [a,b], g≥0, M и m - точные верхняя и нижняя грани f(x) на [a,b] ⇒

∃μ: m ≤ μ ≤ M, .

Док-во Положим g≡1 и из свойства 12 получаем: .

Пусть . Если f(x) непрерывна на [a,b], то ∃p,q ∈[a,b]: m=f(p), M=f(q),

∃ξ ∈ [p,q]: f(ξ) = μ⇒. (формула среднего значения). •

Т (Основная формула интегрального исчисления) Пусть f(x) интегрируема на любом сегменте из (a,b). Пусть c ∈ (a,b) ⇒ ∀x ∈ (a,b) f(x) интегрируема на [c,x] ⇒ на (a,b) определена функция - интеграл с переменным верхним пределом.

Утверждение: любая непрерывная на (a,b) функция f(x) имеет на этом интервале первообразную. Одной из них является функция, где c ∈ (a,b).

Док-во Докажем, что .

,  ∈ [x, Δx] по формуле среднего значения (свойство 13).

При Δx→ 0 f()→f(x), так как f(x) непрерывна в точке х. .•

Любые две первообразных функции f(x) отличаются на const ⇒ любая первообразная для непрерывных на [a,b] функций имеет вид . Пусть x = a ⇒ Ф(a) = C, x = b ⇒⇒ . (Основная формула интегрального исчисления).

**4. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости: Даламбера, интегральный, Лейбница.**

Числовой ряд: .

N-ная частичная сумма: .

Опр Ряд сходится, если существует конечный . Число S называется суммой ряда. Если предел не существует, то ряд расходится. •

T (Критерий сходимости ряда Коши) Для того, чтобы ряд сходился ⇔

∀ε > 0 ∃ N: ∀n≥N и p = 1,2,... .•

Следствие. Для сходимости ряда ⇔ .•

T (Критерий сходимости ряда c неотрицательными членами) Для того, чтобы ряд , где , сходился ⇔ последовательность частичных сумм ограничена. •

Признаки сравнения:

1. Рассмотрим два ряда с неотрицательными членами: и . Пусть ∀k , тогда из сходимости следует сходимость, из расходимости  следует расходимость.•
2. Рассмотрим два ряда с положительными членами: и . Пусть ∀k , тогда из сходимости следует сходимость, из расходимости  следует расходимость.

Док-во Запишем неравенство  для к = 1,2,..n-1 и перемножим соответсвенно левые и праые части: получаем , то есть . Применяя свойство 1, доказываем свойство 2. •

T (Признак Даламбера) Если для любого k, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство , то ряд сходится (расходится). Если , то ряд сходится при L < 1 и расходится при L > 1.

Док-во Положим , где и применим свойство 2 сходимости ряда , откуда следует сходимость (расходимость) ряда . Докажем вторую часть утверждения. Пусть L < 1 ⇒ ∃ε >0: L = 1 - 2ε, то есть L + ε = 1 - ε. По определению предела для ε ∃N: ∀k≥N . Число L + ε = 1 - ε играет роль q в доказательстве первой части утверждения ⇒ ряд сходится. •

T (Признак Коши)

1. Если для любого k, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство , то ряд сходится (расходится).
2. Если , то ряд сходится при L < 1 и расходится при L > 1.

Док-во Положим , где  ⇒ .Применим свойство 1 сходимости ряда , откуда следует сходимость (расходимость) ряда .Доказательство второй части утверждения аналогично доказательству второй части признака Даламбера (с заменой  на ).•

T (Интегральный признак Коши-Маклорена) Пусть f(x) - неограниченна и не возрастает на x≥m, где m - любой номер. Ряд сходится ⇔ , где .

Док-во Пусть k - любой номер, удовлетворяющий неравенству k ≥ m + 1, x ∈ [k-1,k]. Из невозрастания f(x) следует, что ∀х справедливо f(k) ≤ f(x) ≤ f(k-1). Функция f(x) интегрируема на

[k-1,k] и более того , .

∀ k ≥ m + 1 справедливо: 

Суммируя строки системы неравенств и обозначая , получаем: , или . Последовательность - неубывающая ⇒ для ее сходимости необходима лишь ее ограниченность сверху Для сходимости ряда из условия теоремы необходимо и достаточно ограниченности последовательности . Из неравенства следует, что  ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность , то есть тогда и только тогда, когда сходится. •

Опр Ряд абсолютно сходится, если сходится ряд .•

Из абсолютной сходимости рядаследует его сходимость.

Опр Ряд условно сходится, если ряд  сходится, а ряд  расходится.•

Опр Последовательность называется последовательностью с ограниченным изменением, если сходится ряд .

T Если ряд  обладает ограниченной последовательностью частичных сумм, а  - последовательность с ограниченным изменением, сходящаяся к 0, то ряд сходится. •

Опр Знакочередующийся ряд (нечетные с ‘+’, четные - с ‘-‘) , модули членов которого образуют невозрастающую сходящуюся к 0 последовательность, называется рядом Лейбница. •

T (Признак Лейбница) Любой ряд Лейбница сходится.

Док-во - ряд Лейбница, где - невозрастающая сходящаяся к 0 последовательность, . Ряд  обладает ограниченной последовательностью частичных сумм.  - последовательность с ограниченным изменением ⇒ ряд Лейбница сходится. •

# 5. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Непрерывность равномерно сходящегося ряда непрерывной функции.

Пусть в Еm задано {x}. Если ∀n = 1,2,.. ставится в соответствие по определенному закону функция fn(x), определенная на {x}, то множество занумерованных функций f1(x), f2(x), ... ,fn(x),... будем называть функциональной последовательностью(ФП). {x} - область определения функциональной последовательности {fn(x)}. Рассмотрим ФП {un(x)}.  - функциональный ряд (ФР). - n-я частичная сумма ФР. Изучение ФП эквивалентно изучению ФР, так как каждой ФП соответсвует ФР, каждому ФР - ФП. Фиксируем любой x0 ∈ {x} и рассмотрим все члены ФР в точке x0. Получим числовой ряд. Если указанный числовой ряд сходится, то ФР сходится в точке x0. Множество всех точек x0, в которых ФР сходится, называется областью сходимости ФР. Если ФР имеет в качестве области сходимости некоторое множество {x}, то на этом множестве определена функция S(x), являющаяся предельной функцией последовательности частичных сумм этого ряда, и называющаяся суммой ФР.

Опр ФП называется равномерно сходящейся на множестве {x} к сумме S(x), если ∀ε > 0 ∃N(ε):∀n≥N(ε),∀x ∈{x} |Sn(x) - S(x)| < ε.•

Опр ФР называется равномерно сходящимся на множестве {x} к сумме S(x), если последовательность Sn(x) его частичных сумм сходится равномерно на {x} к S(x). •

T ФП {Sn(x)} является равномерно сходящейся на множестве {x} ⇔ ∀ε > 0 ∃N(ε):∀n≥N(ε),∀p = 1,2,..., ∀x ∈{x} |Sn+p(x) - Sn(x)| < ε.

Док-во

|⇒| Пусть {Sn(x)} сходится равномерно к некоторой функции S(x) ⇒ фиксируем ∀ε > 0, для него ∃N(ε):∀n≥N(ε),∀x ∈{x} |Sn(x) - S(x)| < ε. ∀p = 1,2,... тем более

,.

|⇐| Пусть ∀ε > 0 ∃N(ε):∀n≥N(ε),∀p = 1,2,..., ∀x ∈{x} |Sn+p(x) - Sn(x)| < ε. Отсюда и из критерия Коши сходимости последовательности вытекает сходимость последовательности {Sn(x)} в ∀ точке х ∈{x} и существование функции S(x), определенной для ∀х ∈{x}. Фиксируем ∀n≥N(ε), фиксируем ∀х ∈{x}, перейдем к пределу при p→∞ ⇒ ∀n≥N(ε), ∀х ∈{x} ⇒ |Sn(x) - S(x)| ≤ 2ε < ε ⇒ сходимость. •

Следствие ФР  сходится равномерно к S(x) на {x} ⇔ ∀ε > 0 ∃N(ε):∀n≥N(ε),∀p = 1,2,..., ∀x ∈{x}.•

Признак Вейерштрасса Если ФР  определен на {x} и если существует сходящийся числовой ряд ∀x ∈{x}, ∀k справедливо  ⇒ ФР сходится равномерно на {x}.

Док-во Фиксируем ∀ε > 0, для него ∃N(ε):∀n≥N(ε),∀p = 1,2,...  ⇒  ∀n≥N(ε),∀p, ∀x. •

Рассмотрим x0 - предельную точку множества {x}.

T Если ФР  сходится равномерно на {x} к S(x) и ∀k 

Док-во Докажем сходимость . Так как ФР сходится равномерно, то ∀ε > 0 ∃N(ε):∀n≥N(ε),∀p= = 1,2,... ,∀x . Фиксируем n и p и перейдем к пределу при x→ x0. ⇒. В силу критерия Коши сходится. 

.

Фиксируем ∀ε > 0 ⇒ ∃ n: . Так как предел конечной суммы равен сумме пределов слагаемых, то для фиксированного ε и выбранного n ∃δ > 0: ∀x ∈{x}: 0<ρ(x,x0) <δ выполняется  ⇒  ⇒.•

Следствие Если в условиях теоремы дополнительно потребовать, чтобы x0∈{x}, были непрерывны в x0, то S(x) будет непрерывна в x0.

Док-во .•

**6. Криволинейный интеграл. Формула Грина.**

***Опр.*** Спрямляемая кривая – кривая, имеющая конечную длину, при этом длиной кривой называется предел последовательности длин ломаных, вписанных в эту линию, при условии, что длина наибольшего звена > 0. Этот предел всегда ∃, но может быть = ∞ ⇒ кривая неспрямляемая.

Рассмотрим на плоскости Oxy спрямляемую кривую L, без самопересечений и самоналегания, определяющуюся следующими уравнениями:



Будем считать её незамкнутой и ограниченной точками A(ц (a), ш(a)) и B(ц(b), ш(b))

Если на L=AB определены ф-ции f(x,y),P(x,y),Q(x,y) – непрерывные вдоль L(т.е. )

Разобьем [a,b]: a=t0<t1<t2<…<tn=b, [tk-1,tk] k=1..n.

L распадается на n частичных дуг M0M1…Mn-1Mn , Mk(xk,yk)=(xk=ц(tk),yk=ш(tk))

Если ?lk – длина k-той частичной дуги Mk-1Mk , то: {L –гладкая => ц’, ш’ – непр.}



Выберем на всех Mk-1Mk точку Nk(оk, Юk): оk=ц(фk), Юk=ш(фk)[tk-1, tk]

 - диаметр разбиения кривой L

Составим 3 интегральные У:

,

где ?xk=xk-xk-1, Дyk=yk-yk-1

***Опр.*** Число I называется пределом интегральной суммы уs (s=1,2,3), при диам. разб. ?\_0, если |уs-Is|<е при ?<д(независимо от выбора Nk)

***Опр.*** Если ∃ предел интегральной суммы ?1 при ?\_0, то этот предел наз-ся криволинейным интегралом I рода от ф-ции f(x, y) по L и обозначается

 или (не зависит от того, в какую сторону пробегается кривая)

***Опр.*** Если ∃ предел интегральной суммы ?2 (у3) при ?\_0, то этот предел наз-ся криволинейным интегралом II рода от ф-ции P(x, y) (Q(x, y))по AB и обозначается

 (соответственно ) (зависит от того, в какую сторону пробегается кривая: меняется знак)

 - общий интеграл II рода и обозначается 

***Опр.*** Кривая L- гладкая, если на [a,b] ∃ непр. ц'(t), ш'(t), ? в точках a и b обладают конечн. предельн. знач. справа и слева соответственно.

***Опр.*** Особые точки L- соответствующие t: (ц'(t))2+(ш'(t)) 2=0

***Теорема.*** Если L – гладкая, без особых точек на [a,b], и, если f, P, Q – непр. вдоль L то все введённые выше интегралы ∃ и вычисляются по формулам:

 (1)

 (2)

 (3)

***Док-во.*** Интегралы в правых частях (1),(2),(3) ∃, т.к. все подынтегральные ф-ции непр. на [a,b].

Разобьем [a,b] на n сегментов [tk-1,tk], k=1,2,3..n и составим интегральные суммы у1 и ?2.

Учитывая: Дxk=xk-xk-1= ц(tk)-ц(tk-1)= ⇒





Обозначим правые части (1),(2) как I1,I2 и представим их в виде суммы интегралов:





из  и  ⇒ ⇒

 при ?<д фигурная скобка из у1-I1по модулю < е/*l*, где *l* – длина L, а фигурная скобка из у2-I2 по модулю < е/M(b-a), ?де 

,



Аналогично для ?3.\_

***Опр.*** L – кусочно-гладкая, если она непр. и распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых гладкая кривая.

***Замечание1.*** Если L – замкнутая, то контур обходится в положительном напр. (против часовой стрелки) 

***Замечание2(Свойства).***

1. 
2. Если AB=AC+CB ⇒ 
3. 
4. Существует M: , где *l* – длина L.

Формула Грина.

Пусть ? – плоскость в E3, – ед. вектор нормали к ?. D – односвязная обл. на ? и удовл.:

1.  -замкнутая, кусочно-гладкая кривая без особых точек.
2. на ? ∃ декартова прямоугольная система координат: все прямые ||(паралельн) Ox и Oy пересекают C не более чем в 2-х точках.

 -единичный вектор касательной к кривой C, согласованный с (правило буравчика).

***Теорема.*** Если - векторное поле, дифференцируемое в D, удовл. 1),2), и такое, что его производная по ∀ направлению непрерывна в ⇒



***Док-во.*** Все интегралы ∃, т.к. все ф-ции непр. Поскольку и  инвариантны относительно системы координат, то достаточно док-ть в некоторой специальной системе коорд..

Выберем Oxyz: выполняется 2), ось Oz направлена вдоль  , ={P,Q,R}, ={cos α, cos β, 0} R(x,y)≡0

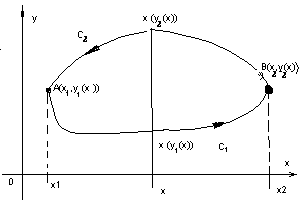


, 



(т.к. dx=2*l*cosα, dy=2lsinα)

Докажем, что:





Аналогично вычисляется Q

*7 Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Аналитическая функция*

***Опр****. Пусть в области J компл. переменной z задана функция f(z). Если для точки z0ОJ, $ при Dz®0 предел разностного отношения,то этот предел называется* ***производной*** *функции f(z) по комплексной переменной z в точке z0. (1)*

***Теор.*** *(Условие Коши-Римана)Если функция f(z) = u(x,y) + i v(x,y) диф-ма в точке z0 = x0 + i y0, то в точке (x0,y0) $ частные производные функций u(x,y) и v(x,y) по переменным x, y. Причем*

*, (2)*

*Док-во:По условию теоремы $ предел (1), не зависящий от способа стремления Dz к нулю.*

*Пусть Dz = Dx. .*

*Из существования предела комплексного выражения следует существование пределов его действительной и мнимой частей. Следовательно, в (x0,y0) $ частная производная по x функций u(x,y) и v(x,y), и .*

*Положим Dz = i Dy. Следов-но, Ч.ит.д.*

***Теор.****Если в точке (x0,y0) функции u(x,y) и v(x,y) диф-мы, а их частные производные связаны соотношениями (2), то функция  является диф-мой функцией комплексного переменного z в точке z0 = x0 + i y0.*

*Док-во:,*

*и,. ,*

*где .Значит, $ . Следовательно, f(z) дифф-ма в точке z0.*

***Опр.*** *Если функция f(z) диф-ма во всех точках некоторой области J, а ее производная непрерывна в этой области, то функция f(z) называется* ***аналитической*** *в области J.*

***Из теорем 1 и 2 следует****, что для аналитичности функции f(z) = u(x,y) + i v(x,y) в области J необходимо и достаточно сущ-е непрер. частных производных функций u(x,y), v(x,y), связанных условиями Коши-Римана.*

***Свойства аналитических функций****:*

1. *Если функция f(z) аналитична в J, то она непрерывна в J.*
2. *Если f1(z) и f2(z) - аналитичны в J, то их сумма и произведение тоже являются аналитическими функциями в J, а функция  является аналитической всюду, где f2(z) № 0.*
3. *Если w = f(z) является аналитической в J, G - область значений, в G определена аналитическая функция , тогда функция F(z) = j[f(z)] является аналитической функцией комплексного переменного z в области J.*
4. *Если w = f(z) является аналитической функцией в J, причем |f'(z)| № 0 в окрестности точки z0 О J, то в окрестности точки w0 = f(z0) области G определена обратная функция z = j(w), являющаяся аналитической функцией комплексного переменного w. При этом .*

*Значение функции f(z), аналитической в J, ограниченной Г и непрерывной в `J, во внутренних точках этой области равно *

*Существует производная любого порядка у функции f(z): .*

*8 Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости*

***Опр****. Степенным рядом называется функциональный ряд вида*

* (1)*

*где a0, a1,… - вещественные числа, называемые коэффициентами ряда.*

*Любой степенной ряд сходится в точке х = 0.*

*Рассмотрим последовательность , n = 1,2,… (2).*

*Если последовактельность (2) ограничена, то у нее $ конечный верхний предел, равный L, причем L і 0 (т.к. элем. неотр.).*

***Теор.*** *(Коши-Адамара)*

1. *Если последовательность (2) неогр., то степенной ряд (1) сходится лишь при х = 0.*
2. *Если последовательность (2) ограничена и имеет верхний предел L > 0, то ряд (1) абсолютно сходится для "x: |x| < 1/L и расходится для "x: |x| > 1/L*
3. *Если L = 0, то ряд (1) сходится "х.*

*Док-во:*

1. *Пусть (2) не ограничена, тогда "х № 0  тоже не ограничена, то есть у этой последовательности имеются члены со сколь угодно большими номерами n: , или . Следовательно, для (1) нарушено начальное условие сходимости ряда.*
2. *А) Фиксируем "х: |x| < 1/L. Тогда $ . В силу свойств верхнего предела все элементы , начиная с некоторого n, удовлетворяют неравенству:*

*, откуда .*

*Следовательно, по признаку Коши ряд (1) сходится абсолютно.*

*Б) Фиксируем "х: |x| > 1/L. Тогда $ *

*По определению L из (2) можно выделить сходящуюся к L подпоследовательность, т.е. начиная с некоторого k*

*, откуда получаем.*

*То есть,  - нарушено необходимое условие сходимости ряда.*

*(Необходимое условие сходимости любого ряда: для сходимости ряда необходимо, чтобы последовательность u1,…,uk,… членов этого ряда являлась б.м.)*

1. *Пусть (2) - б.б. последовательность, L = 0, ∀ х ≠ 0. Отрицательной предельной точки у (2) нет, следовательно, L = 0 - единственная предельная точка.*

*∃ предел (2), равный L, следовательно,*

*∃n: ∀x *

*А значит, ряд сходится по Коши.*

*Теорема полностью доказана.*

***Опр****. R = 1/L -* ***радиус сходимости****.*

*Ряд сходится при |x| < R и расходится при |x| > R.*

*Интервал сходимости: (-R,R).*

*При x = +R, x = -R поведение не определено (может и сходиться, и расходиться).*

1. **Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, сходимость ряда Фурье.**

Линейное пространство R евклидово, если :

1. (f, g) — скалярное произведение, ∀ f, g → число
2. (f, g) = (g, f)

(f+g, h) = (f, h) + (g, h)

(λf, g) = λ(f, g)

(f, f) > 0, если f≠0

(f, f) = 0, если f=0

Линейное (евклидово) пространство бесконечномерное, если в этом пространстве ∃ ∀ наперёд взятое число ЛНЗ элементов.

Пример: Пространство кусочно непрерывных на [a, b] функций является евклидовым пространством ∞ - й размерности.

Свойства евклидова пространства бесконечной размерности:

1. ∀ f, g : (f, g)2 ≤ (f, f)(g, g) — неравенство К.-Б.
2. ∀ f введём норму  : 

* , равенство ;
* ;
*  — неравенство треугольника

Доказательство :



Определение: f и g ортогональны, если (f, g) = 0.

Определение: Последовательность ψ1, ψ2, ... , ψn в R называется ортогональной, если .

Например, в R0 на [-π, π] : 

Определение: Ряд Фурье элемента f по ОНС {ψk} — ряд вида , где — коэффициент Фурье функции.

— n-я частичная сумма ряда Фурье.

Рассмотрим ∀ C1, ..., Cn и (\*)

— отклонение f от g.

Теорема 1: Среди всех сумм вида (\*) наименьшее отклонение от элемента f по норме данного евклидова пространства имеет n-я частичная сумма ряда Фурье элемента f.

Доказательство :



⇒ наименьшее отклонение при Ck = fk.

ч.т.д.

Следствие 1:

1. (1)
2. (2) — тождество Бесселя(для док-ва положим Ck = fk)

Определение :ОНС называется замкнутой, если  ∃ линейная комбинация конечного числа элементов , отклонение которой от f (по ) меньше ε.

Теорема 2: — неравенство Бесселя

Доказательство :

Левая часть неотрицательна из (2).ряд из неотрицательных членов обладает ограниченной последовательностью частичных сумм и поэтому сходится.

ч.т.д

Теорема 3: Пусть  — замкнутая ОНС ⇒ , .

Доказательство :

Фиксируем и  существует n и C1,…,Cn :



ч.т.д.

Теорема 4: Если  — замкнутая ОНС ⇒  

Доказательство :



ч.т.д.

Определение :ОНС называется полной, если кроме нулевого элемента не существует никакого другого элемента .

Теорема 5: Любая замкнутая ОНС является полной.

Доказательство :

Пусть  — замкнутая, пусть *f* любой элемент принадлежащий R: f — нулевой элемент.

ч.т.д.

Теорема 6: Для любой полной ОНС два различных элемента f и g ∈ R не могут иметь одинаковые ряды Фурье.

Доказательство :

Пусть 

ч.т.д.

Пусть R0 [-π,π], рассмотрим тригонометрическую систему













Определение : Функция *f(x)* имеет период T, если 1) *f(x)* — определена ∀x

1. *f(x+T)=f(x)*

Функция *f(x)* может быть равномерно приближена на сегменте [-π,π] ⇔ *f(x)* непрерывна на нём и

*f(-π)=f(π)*

**10. Прямая и плоскость, их уравнения. Взаимное расположение прямой и плоскости. Основные задачи на прямую и плоскость.**

Утверждение 1 : Если на π задана прямая *L* и фиксирована *Oxy*, то *L* определяется в этой системе уравнением 1-ой степени.

Утверждение 2 : Если на π фиксирована *Oxy*, то любое уравнение 1-ой степени с двумя переменными *x* и *y* определяют относительно этой системы координат прямую.

Доказательство : Пусть фиксировано *Oxy*, *Ax + By + C = 0*, *A2 + B2 ≠ 0* ⇒ существует (*x0, y0*) : *Ax0 + By0 + C = 0* ⇒ *A(x - x0) + B(y - y0) = 0* (\*). Докажем, что это уравнение определяет прямую, проходящую через *M0(x0, y0)* ⊥ вектору *n = {A, B}*. *M(x, y)* ∈ *L*, то её координаты удовлетворяют этому уравнению, т.к. векторы *n = {A, B}* и ортогональны и *A(x - x0) + B(y - y0) = (n,* *) = 0.* Если же точка не лежит на прямой, то её координаты не удовлетворяют (\*). ч.т.д.

— уравнение прямой, .

— ортогонален *L*, 

,  — уравнение плоскости.



Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух плоскостей, определяемых уравнениями  и . Или в каноническом виде: уравнение прямой, проходящей через точку

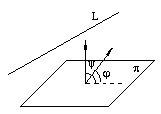
Доказательство : 

 — уравнение прямой в пространстве. ч.т.д.

**Взаимное расположение прямой и плоскости.**



1. 
2. 

3. 

*ϕ* — угол между *L* и π. , *ψ* — угол между и .



1. , *М1* — любая точка прямой

**Основные задачи на прямую и плоскость.**

1. Условие пересечения 3-х прямых в одной точке



Пусть L1 и L2 — пересекаются, т.е. существует *M(x\*, y\*)*:

 — т. пересечения ⇔ *x\*, y\** — решение системы уравнений, т.е. *L1, L2, L3* пересекаются ⇔ *L3* проходит через *M(x\*, y\*)* ⇔



1. Условие пересечения 3-х плоскостей в одной и только одной точке



1. Уравнение прямой, проходящей через т. *M1(x1, y1, z1)* и перпендикулярной 



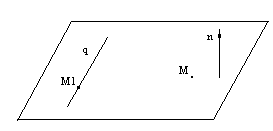
1. Уравнение плоскости, проходящей через *M0(x0, y0, z0)* и параллельной 



1. Уравнение плоскости, проходящей через *М0* и перпендикулярной прямой *L*.



1. Уравнение плоскости, проходящей через прямую *L* и точку *M0∉L*



— условие о принадлежности прямой данной плоскости. ⇒ наруш. одно из условий , выразим A, B через C, затем дадим С любое значение.

1. Уравнение плоскости, проходящей через *M1*, *M2*, *M3*, не лежащих на одной прямой

 — компланарны ⇔ смешанное произведение равно 0 ⇔



***11. Алгебраические линии и поверхности второго порядка, канонические уравнения, классификация***

*Определение : Уравнение линии 2-го порядка имеет вид , где , при этом *

*, , .*

*Обозначим I1=trA = a11 + a22, I2=|A|, I3=|B|, где , .*

*I1, I2, I3 являются инвариантами линий 2-го порядка относительно преобразований декартовой системы координат.*

*Геометрические характеристики линий 2-го порядка определяются значениями инвариантов I1, I2, I3.*

*Теорема : Переносом начала координат и поворотом плоскости уравнение можно привести к одному их следующих типов : I.  ( I2 ≠ 0 )*

1. * ( I2 = 0, I3 ≠ 0 )*
2. * ( I2 = 0, I3 = 0 )*

*Определение : Уравнения I-III типа называются приведёнными уравнениями линий 2-го порядка на плоскости.*

# Алгебраические линии 2-го порядка

*I тип : I­­­­2 ≠ 0, , , *

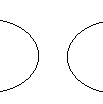
1. *Линии эллиптического типа.  (I­­­­2 > 0)*

*a) , I3< 0 , канонический вид ; a, b > 0. Эллипс*

*б) , I3> 0 , канонический вид ; a, b > 0. Мнимый эллипс*

*в) a0=0, I3= 0 , канонический вид ; a, b > 0. Пара пересекающихся мнимых прямых (ПМПхП)*

1. *Гиперболический тип. , (I­­­­2 > 0)*

*а) a0≠0, I3≠ 0 , канонический вид . Гипербола *

*б) a0=0, I3= 0 , канонический вид . Пара пересекающихся прямых (ППхП)*

*II тип : линии параболического типа*

*I1 = λ2, I2 = 0, I3 = , канонический вид , p>0. Парабола.*

**

*III тип : I1 = λ1, I2 = 0, I3 = 0*

1. *, канонический вид . Пара параллельных прямых (ПП||П)*
2. *, канонический вид. Пара мнимых параллельных прямых (ПМП||П)*
3. *C0=0, канонический вид y2=0. Пара слившихся прямых (ПСП)*

***Алгебраические поверхности 2-го порядка***

*(2)*

*Инварианты :*

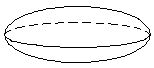
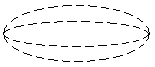
*, , , *

*Теорема : С помощью параллельного переноса и плоских вращений уравнение (2) можно привести к одному и только одному из следующих видов:*

1. *(I3≠0)*
2. *(I3=0)*
3. **
4. **
5. **

*I тип : I3=λ1λ2λ3≠0*

*1)*

*а) — элипсоидб) — мнимый элипсоид*

*в) —вырожденный элипсоид. •*

*2)*

*а)-однополостный гиперболоид б)—двухпол. гиперболоид*

*в) — эллиптический конус*

*II тип : I3=λ1λ2b0≠0*

*1) — эллиптич. параболоид— гиперболич. -||-*

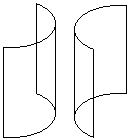
*III тип :*

*1)*

*а) — эллиптич. цилиндрб) — мнимый эллиптический цилиндр*

*в)  — вырожденный цилиндр •*

*2)*

*a)- гиперболич. цилиндрб) - пара пересек-ся плоскостей*

*IV тип :*

*— параболический цилиндр*

*V тип :*

1. *— пара параллельных плоскостей*
2. *— пара мнимых параллельных плоскостей*
3. * — пара совпадающих параллельных плоскостей*

Билет 12

Система Линейных Алгебраических Уравнений

ax + ax + ... +ax = b совместна, если ∃ решение

...

ax + ax + ... +ax = b совместно определенна , если ∃ ! решение

Ax = b ; Ax=0 - однородная система (∃ нетривиальное решение)

Утв. Однородная система имеет нетривиальное решение ⇔ rg (A)< n

Т. Кронеккера-Капелли : система совместна ⇔ rg[A|b] = rg A

Док-во:

⇒ СЛАУ совместна ⇒ ∃ с1, с2, ...сn : ai1+...aincn ⇒ rg[A|b] = rg A

⇐ Пусть rg[A|b] = rg A = r ⇒∃ r базис столбцов в А , он является базисом и для [A|b] следовательно b - линейная комбинация.

Ax = b ; A∈Rnxn; |A|≠0 ⇒СЛАУ совместна и ∃ единственное решение.

Билет 13

Линейный оператор в конечном пространстве , его матрица.

Опр. Пусть даны 2 линейных проcтранства V и W над общим полем P.

Отображение A:V→W называется линейным отображением , если

1) A(x + y) = A(x) + A(y)

2) A(αx) = αA(x)

∀ x, y ∈ V , ∀ a∈P

α(V,W) - множество всех линейных операторов действующих из V в W.

Теорема: e1, e2,... en - базис в V ; g1, g2,... gn - ∀ вектора в W ⇒ ∃ A∈α(V,W): ∀ i=1..n Aei = gi

Доказательство

∃ : ∀ x = ; A: x→  ⇒Ax = 

! : Пусть ∃ B∈α(V,W) : Bei = gi ⇒ Bx = B() =  =  = Ax 

Определение:

Ae1 = a11f1 + a21f2 +... am1fm

...... ⇔ Aij =  i=1..n

Aen = a1n f1 + a2n f +... amnf

матрицы линейного оператора А в базисе векторов e и f

a11 a12 ...a1n

a21 a22 ...a2n

A = ......

am1 am2 ...amn

Определение :

A∈α(V,W) образом im A = { y∈W| ∃x∈V: Ax= y}

ядром ker A = {x∈V| Ax = 0}

Определение:

Нормой ЛО А = 

***14. Ортогональные преобразования евклидова пространства. Ортогональные матрицы и их свойства.***

*Опр. E - евклидово пространство, если  ;*

*Опр. Линейный оператор  - ортогональный, если *

*Теорема  - ортогональный .*

*Доказательство:  .*

*фиксируем .*

* .*

*Опр. Матрица  - ортогональная, если .*

*Утв.  о/н базис в  - ортогональный  ортогональна его матрица в :  (собственные значения по мод. = 1)*

*Доказательство:*

* *

* и  - два ортогональных преобразования.*

* *

*; ;*

* - собственная матрица - поворот на *

* - несобственная матрица - поворот на  и отражение.*

*:*

**

**

*оператора в вещественном пространстве  одномерное либо 2-х мерное инвариантное подпространство*

**

**

*действие ортогонального оператора в ортонормированном базисе - последовательные повороты и отражения.*

**15. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы.**

- л.о.

Опр. - собственное значение , если  - собственный вектор 

Опр.  - характеристический многочлен оператора 

уравнение  - характеристическое уравнение оператора 

Теорема. - собственное значение  -корень характеристического уравнения.

Доказательство - собственное значение,      

 - корень характеристического уравнения.   ч.т.д.

Следствие:  линейный оператор имеет собственные значения.

Теорема. Характеристический многочлен подобных матриц совпадает.

Доказательство  

**16. Формализация понятия алгоритма(машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова). Алгоритмическая неразрешимость.**

Опр. *Алгоритм* - это строгая и четкая конечная система правил, которая определяет последовательность действий над некоторыми объектами и после конечного числа шагов приводит к достижению поставленной цели.

Это интуитивное понятие, так как не известно, например, что есть “объект”  Для формализации понятия алгоритма естественно начать с формализации понятия объекта. Можно считать, что алгоритм имеет дело не с объектами реального мира, а с изображениями этих объектов Объекты реального мира можно изображать словами в различных алфавитах.

Опр. *Алфавит* - конечная совокупность букв, буква -знак. Слово - конечная последовательность букв из алфавита.

*Алгоритм* - четкая конечная система правил для преобразования слов из некоторого алфавита в слова из этого же алфавита. Входные и выходные слова. Алгоритм может быть применим не ко всем словам из алфавита.

Формализованные действия над словами и порядок этих действий.

*Машина Тьюринга*(1936) - гипотетическая машина. Алгоритм - это то, что умеет делать эта машина. Если что-то не может быть сделано МТ, то это уже не алгоритм. С помощью МТ можно доказать  или  алгоритмов решения различных задач. МТ - бесконечная лента, разделенная на ячейки, автомат, программа. В ячейке находится одна буква из алфавита. Автомат может двигаться вдоль ленты и по очереди обозревать содержимое ячеек. Он может находиться в одном из нескольких состояний . В зависимости от того, какую букву  автомат видит в состоянии , то есть от пары  автомат может выполнить следующие действия:

* запись новой буквы в обозреваемую ячейку.
* сдвиг влево или вправо на одну ячейку.
* переход в новое состояние.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  | ?? |  |
|  |  |  |  |  |

Задание для работы МТ можно изображать программой (процедурой?) Входным словом является слово, которое первым было на ленте. То, что получилось на ленте после останова - выходное слово. Если МТ не останавливается, то считается, что она не применима к данному входному слову. Применима  если начав работу над входным словом она остановится.

*Алгоритм* - это то, что может быть реализовано МТ.

С помощью МТ можно строить различные композиции алгоритмов. Если алгоритмы А и В реализуются МТ, то можно реализовать например выполнение А, если появилось “да”, то выполнять В, иначе не выполнять. Тьюринг выдвинул тезис: “ алгоритм может быть реализован соответствующей МТ.” Этот тезис есть формализованное определение алгоритма, доказать тезис нельзя, так как не определено понятие “ алгоритм”.

Описываемый способ интерпретации работы МТ сам является алгоритмом. Ему соответствует некоторая МТ, в которой входное слово состоит из изображения программы и входного слова интерпретируемой машины. Такая МТ называется универсальной. После завершения работы универсальной МТ на ее ленте должно остаться то слово, которое получилось бы в результате работы интерпретируемой машины.

*Нормальные алгоритмы Маркова* (1954). Нет понятия ленты и подразумевается непосредственный доступ к  частям преобразуемого слова. Эту схему он назвал нормальным алгоритмом. ]А,В - слова в некотором алфавите. Нормальный алгоритм можно записать в следующем виде:

Каждая пара - формула подстановки для замены подслов в преобразуемом слове. Ищется вхождение слова  в исходное слово. Если нашли, то заменяем его на , если нет, то ищем  и так далее. Затем возвращаемся в начало и снова ищем вхождение . Процесс заканчивается, если ни одна из подстановок не применима, либо применилась завершающая формула, в которой .

Доказано, что алгоритмические схемы Маркова и Тьюринга эквивалентны. Основная гипотеза Маркова:  алгоритм нормализуем.

В теории алгоритмов известны задачи, для которых доказано, что для их решения  алгоритма. Такие задачи называются алгоритмически неразрешимыми. Проблема распознавания самоприменимости. *Самоприменимые алгоритмы* - это алгоритмы, которые, начав работу над собственным описанием останавливаются. Если же зацикливаются, то такой алгоритм называется несамоприменимым.

Задача найти общий алгоритм, который для  алгоритма отвечал бы на вопрос, самоприменим ли он.

Докажем, что такой алгоритм .

Доказательство. ] такой алгоритм А. Р -  алгоритм.

А(запись Р)



если Р самоприменим,

если Р несамоприменим.

] В - алгоритм: увидев С- зацикливается, увидев Н - останавливается.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | С | Н |
| q1 | C,q1 | ,q1 | ! |

- МТ.

Алгоритм В , так как записали для него МТ. Если А и В, то К = АВ, то есть алгоритм, который выполняет сначала А, а потом В.

Докажем, что К , доказав, что он не может быть ни самоприменимым, ни несамоприменимым.

Рассмотрим применение К к его собственной записи.

] К - самоприменим  А(запись К) С, но В зацикливаетсяК - несамоприменим.

] К - несамоприменим  А(запись К) Н, и В останавливаетсяК - самоприменим.

К , но В А.

Вопрос 17. Структура и состав вычислительной системы (аппаратура + программное обеспечение)

**Вычислительная система**

Интеграция аппаратуры и ПО, построенная для решения некоторого класса задач.

**Вычислительная система как иерархия уровней**

|------------------------------------------------------------------------

| Прикладной уровень

|------------------------------------------------------------------------

| Уровень систем программирования

|------------------------------------------------------------------------

| Управление виртуальными логическими ресурсами.

|

| Унификация доступа к ресурсам

|------------------------------------------------------------------------

| Управление физическими ресурсами

|

| Предоствляет стандартный способ доступа к физическим  ресурсам.

|------------------------------------------------------------------------

| Аппаратура

|

| Набор  доступных физических ресурсов, правила программного использования. Ограничения.

|------------------------------------------------------------------------

Вычислительная система как набор уровней со все более виртуальными ресурсами и способами доступа к ним.

Виртуальный ресурс - тот, часть / все характеристики которого реализованы программно.

Вопрос 18. Основные компоненты архитектуры ЭВМ (процессор, устройства памяти, внешние носители)

Основные из традиционных принципов построения ЭВМ, сформулированные фон Нейманом, следующие:

* наличие единого вычислительного устройства, включающего процессор, средства передачи информации и память;
* линейная структура адресации памяти, состоящей из слов фиксированной длины;
* двоичная система исчисления;
* централизованное последовательное управление;
* хранимая программа;
* неотличимость данных от инструкций
* низкий уровень машинного языка;
* наличие команд условной и безусловной передачи управления;
* АЛУ с представлением чисел в форме с плавающей точкой.

В современных ЭВМ не обязательно выполняются все принципы Фон Неймана:

* Бывают ЭВМ с троичными системами счисления
* На некоторых мобильных платформах инструкции отличаются от данных
* Ввод/вывод производится не через АЛУ
* Более одного УУ, более одного АЛУ (или подобной аппаратуры)

Одна из возможных архитектур ЭВМ:

Вопрос 19. Операционные системы, основные функции. Типы операционных систем.

(Машечкин) **Операционная система** - программа управления ресурсами вычислительной системы. В то же время ОС является частью ВС (?).

(Википедия) Существуют две группы **определений ОС**: «совокупность программ, управляющих оборудованием» и «совокупность программ, управляющих другими программами»

Принципиально, ОС не является необходимой частью вычислительной системы. Программное опеспечение вычислительной системы может само управлять ресурсами и не быть ОС.

ОС служат для управления ресурсами и выполнения прикладных программ.

Состав ОС:

* Ядро (монолитное / микроядро)
* Специальные программы - драйвера физических устройств, драйвера логических устройств
* Файловая система

Типы ОС:

* Пакетные. Программы выполняются последовательно.
* Разделения времени. Эмуляция выполнения нескольких программ одновременнно. Необходимые условия:
  + Наличие защищенного режима
  + Прерывания
  + Защита памяти
* Реального времени
* Сетевые ОС - пользователи могут получить доступ к ресурсам другого сетевого компьютера, только они должны знать об их наличии и уметь это сделать.
* Распределенная система - внешне выглядит как обычная автономная система, однако управляет более чем одной вычислительной системой.

Функции ОС (в зависимости от типа - свои функции):

* Интерфейс для прикладных программ
* Организация очереди из заданий в памяти и выделение процессора одному из заданий потребовало планирования использования процессора.
* Переключение с одного задания на другое требует сохранения содержимого регистров и структур данных, необходимых для выполнения задания, иначе говоря, контекста для обеспечения правильного продолжения вычислений.
* Поскольку память является ограниченным ресурсом, нужны стратегии управления памятью, то есть требуется упорядочить процессы размещения, замещения и выборки информации из памяти.
* Организация хранения информации на внешних носителях в виде файлов и обеспечение доступа к конкретному файлу только определенным категориям пользователей.
* Поскольку программам может потребоваться произвести санкционированный обмен данными, необходимо их обеспечить средствами коммуникации.
* Для корректного обмена данными необходимо разрешать конфликтные ситуации, возникающие при работе с различными ресурсами и предусмотреть координацию программами своих действий, т.е. снабдить систему средствами синхронизации.

Вопрос 20. Парадигмы программирования (функциональное, императивное, объектно-ориентированное)

**Парадигма программирования** - семейство обозначений, рекомендаций и идей, определяющих общий способ (методику) реализации программ

**Функциональная парадигма** - процесс вычисления как получение значения (результата) математически описанной функции. Комбинация вызовов функций того же или более низкого уровня. Каждая следующая функция в этой комбинации описывается аналогичным образом, до тех пор, пока описание не сведётся к предопределённым функциям, вычисление которых считается заданным. Вычисление функции не имеет побочного эффекта кроме возвращеня результата.

Язык Lisp - почти оно.

Пример вычисления факториала: главная\_функция (входное\_число) = умножить( входное\_чило , главная функция ( минус (входное\_число , 1) ) )

**Императивная парадигма** - процесс вычисления в виде инструкций, изменяющих состояние программы. Последовательность команд, которые должен выполнить компьютер.

Пример:

а = 1

с = а + входное\_число

вывод с

**Объектно-ориентированная парадигма** - в которой основными концепциями являются понятия объектов и классов.

Класс — это тип, набор методов и свойств. Класс можно сравнить с чертежом, согласно которому создаются объекты. Пограмма - набор классов. Выполнение программы - взаимодействие множества объектов (экземпляров классов) с помощью обмена сообщениями.

Принципы:

* Абстракция - Объекты представляют собою упрощенное, идеализированное описание реальных сущностей предметной области
* Инкапсуляция - класс - черный ящик, он скрывает детали своей реализации. Известен лишь интерфейс, способ работы с ним (методы и свойства).
* Наследование - порождение нового класса от другого с сохранением/изменением свойств и методов класса-предка
* Полиморфизм - один и тот же программный код выполняется по-разному в зависимости от того, объект какого класса используется при вызове данного кода

Концепции:

* Система состоит из объектов
* Объекты некоторым образом взаимодействуют между собой
* Каждый объект характеризуется своим состоянием и поведением
* Состояние объекта задаётся значением полей данных
* Поведение объекта задаётся методами

Пример:

класс Main { поле-типа-А м, метод main ( м = новый объект класса А; м.Изменить() )}

класс А { поле-число х, поле-число у, метод Изменить ( х = 1 )}

Билет 22. Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению.



Рассмотрим систему: (1) y – n-мерная вектор функция

с компонентами y1,…,yn

Определение. Решение y=y(t,y0) задачи (1) называется устойчивым по Ляпунову, если



Определение. Решение y=y(t,y0) задачи (1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, кроме того 



Перейдем от y к x: x=y-y(t,y0), , тогда получим систему

(2)

Решению  отвечает решение 

Обозначим 

Определение. Тривиальное решение системы (2) называется устойчивым по Ляпунову, если





Определение. Тривиальное решение системы (2) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, кроме того 

Устойчивость по первому приближению:



Рассмотрим (3)

(f не зависит от t – автономная система)

Разложим по теореме Тейлора 





Определение. Система  (4) называется системой первого приближения для системы (3).

Теорема1. Пусть в некоторой окрестности точки x(0,…,0) функции  непрерывны вместе с производными до 2-го порядка включительно. Тогда, если все характеристические числа матрицы с элементами  удовлетворяют условию , то тривиальное решение системы устойчиво, причем асимптотически.

Лемма 1. Имеют место следующие утверждения:

1) Пусть y – вектор с компонентами . Тогда 

2) Пусть y – вектор с компонентами . Тогда 

3)  

4)  

5) Для матрицианта  линейной системы (4) справедливо неравенство , где  Const.

Определение. , где W(x) – фундаментальная матрица системы.

Доказательство:

1) Для 2-х мерного случая ,

Т.е. 



1) , если достаточно мало 

2)  , если 

3)  при 

Напишем для z(t) интегральное уравнение



Убедимся, что при  (\*)

1. t=0 – неравенство справедливо.
2. Пусть при неравенство перестает выполняться и 

В силу (2) при достаточно малом - 

При  (\*) верно, поэтому , (т.е. )

поэтому при , 



«противоречие»верно (\*)

Теперь, пусть , , .

Тогда , и в силу (\*) и 2) , - т.е. тривиальное решение (3) устойчиво, причем в силу 3) асимптотически.

Пример.

  , 

2) Аналогично.

3) Очевидно.

4) 

5) Столбцы фундаментальной матрицы W(t) имеют вид:

, пусть 





ограничена при . Таким образом, 

Убедимся, что .

удовлетворяет 

заменяя  на  удовлетворяет 

поэтому по теореме единственности 

Доказательство Теоремы 1:

, т.е. решение 

Рассмотрим точку фазового пространства  по Лемме 2), , 

Рассмотрим вспомогательную задачу.

**Билет 23. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная Д.Н.Ф.**

Функции от переменных  со значениями из {0,1} обозначим .

Их всего 

Определение. В ,  называется существенной, если 



И фиктивной, если 

Операции над ф.а.л. – Добавление и удаление фиктивных переменных

Определение. Ф.а.л. называются равными, если они переводятся одна в другую добавлением или отбрасыванием фиктивных переменных.

Определение. Формула над F. (индуктивное определение)



1. - формула над F. (базис)
2. Если каждый из объектов  либо формула над F, либо переменная, то - формула над F.

Определение. Две формулы называются эквивалентными, если они реализуют равные функции.

**Значение формулы.**

1. 
2. 

  ;  на 1-м наборе 

**Теорема.**

Пусть -ф.а.л. Тогда  

(V берем по всевозможным )

**Доказательство:**

1. Берем  

Два случая:

а) 

б) 

Частные случаи:

1. k=1 – разложение по переменной 
2. k=n – совершенная д.н.ф. 

Следствие. Любую ф.а.л. можно представить в виде с.д.н.ф.

Билет 24. Схемы из функциональных элементов и простейшие алгоритмы их синтеза. Оценка сложности схем, получаемых по методу Шеннона.

Б = {,,} - стандартный базис.



Определение. Ориентированный граф без контуров называется СФЭ в базисе Б, если каждая вершина нулевой степени захода (не входят дуги) помечена символом переменной, а любая другая (1 или 2 входа) символами &, V, . Схема реализует функцию, образующуюся на выходе.





Проблема синтеза СФЭ: по данной функции f построить схему , ее реализующую.

Алгоритмы синтеза.

1) По совершенной ДНФ.



Реализуем 









2) По реализации множества всех конъюнкций



Пусть - множество всех 





S – количество V в с. д.н.ф. 



3) Разложение по 1-ой переменной







Определение. Универсальный мн-к – СФЭ с n входами и s выходами и  - выход (выходов).

Утверждение. 

Доказательство (по индукции):

1) : 

2) Индукция: 

=



1)

2)  их 

3)  их 

4)  их 





Теорема Шеннона.

Существует метод синтеза .



(построена по методу 2)







Пусть m=n-k;







25. Вероятностное пространство. случайные величины. закон больших чисел в форме Чебышева

Вероятностное пространство - это тройка (Ω, ***А***, Р), где

Ω = {ω} — пространство элементарных событий (исходов) - непустое множество, элементы ω которого интерпретируются как взаимно исключающие исходы изучаемого случайного явления;

***А*** — набор подмножеств множества Ω, называемых событиями. ***А*** является σ-алгеброй, т.е. Ω∈***Α***, если Α1∈***Α*** ⇒ ∈***Α***, **∀**Α1Α2,...∈Α ⇒ ∪i=1,∞ Αi∈Α;

Р вероятность — функция, определенная на ***А*** и удовлетворяющая следующим условиям:

1) Р (А) >=0 **∀**Α∈***Α***;

2) Р (Ω) =1

3) Ρ (∪i=1,∞Αi) =∑i=1,∞ P(Ai), если АiAj =∅ при i≠j

⇔ 3а) Ρ (Α+Β) =Ρ(Α)+Ρ(Β), ΑΒ=∅

3б) **∀**Α1⊃Α2⊃...⊃Αn⊃..., ∩∞Αi=∅ ⇒ n→∞lim P(Αn)=0

Примеры:

1) Пусть Ω=(ω1, ..., ωs), Α={ωi1, ...,ωik}—всевозможные подмножества множества Ω

Р(ω1)=...=Ρ(ωs)=1/s ⇒ Ρ(A)=**⎜**A **⎜**/ **⎜**Ω **⎢—**классическое опр. вероятности

1. Пусть Ω — множество в n-мерном евклидовом пространстве, объём μ(Ω) которого >0 и конечен. σ- алгебра ***Α*** состоит из всех измеримых (т.е. имеющих объём) подмножеств Α⊂Ω.

Ρ(Α)=μ(Α)/ μ(Ω), Α∈Ω — геометрическое определение вероятности.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, ***Α***, Ρ).

Случайной величиной называется действительная функция от элементарного события ξ=ξ(ω), ω∈Ω, для которой при **∀** действительных x множество {ω: ξ(ω)<x} принадлежит ***Α*** (т.е. является событием ) и для него определена вероятность Ρ{ω: ξ(ω)<х} или Ρ{ξ<х}. Эта вероятность, рассматриваемая как функция х, называется функцией распределения случайной величины ξ и обозначают Fξ(x). С помощью Fξ(x) можно однозначно определить Ρ(ξ∈Β) для борелевских множеств на числовой прямой. Ρ(ξ∈Β) как функция Β называется распределением вероятностей случайной величины ξ.

Примеры:

Если pξ(x) >= 0 ∀ x:

1) абсолютно непрерывные распределения:

Ρ{ξ∈Β}=  , где p(x) - плотность вероятности

2) дискретные распределения - задаются конечным или счетным набором вероятностей

Ρ{ξ=хК}: , 

Свойства:

1) lim x->∞ Fξ(x) = 1

2) lim x->-∞ Fξ(x) = lim x->-∞ P(ξ<x) = 0

3) Fξ(x) - неубывающая функция

4) Fξ(x) односторонне непрерывна (слева, если Fξ(x)=P(ξ<x)) lim x->x0- F(x) = F(x0)

*Математическим ожиданием* случайной величины ξ называется число Mξ = , если интеграл Лебега . Если ξ имеет плотность, то Mξ = . Если ξ - дискретна, то Мξ = , если ряд сходится абсолютно. В общем случае Mξ = .

*Дисперсией* случайной величины ξ называется число Dξ = M={определение математического ожидания}=

**Неравенство Чебышева**

Доказательство:

 Так как в области интегрирования  1 ,

то  = .

**Теорема Чебышева**

Если ξ1, ξ2,..., ξn - последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной С: Dξ1 , Dξ2 ,..., Dξn  , тогда .

Доказательство:

По свойствам дисперсии:  => 

Из неравенства Чебышева:   ,n->∞ =>

 так как *P* не может быть > 1.

Свойства вероятности (из определения):

1. Если А⊆В, то Р(В\А) = Р(В) - Р(А)  
   Т.к. В=А+(В\А), А∩(В\А) = 0 => Р(В) = Р(А) + Р(В\А)  
   Аналогично А1⊇А2⊇А3⊇... ⊇Аn⊇... и ∩n=1,∞ Аn = 0 => limP(An)=0
2. Если А⊆В, то Р(А) <= P(B)
3. A∈**A** => 0<=P(A)<=1
4. P()=1-P(A)
5. P(∅)=0

Примеры распределений:

1. P(ξ=a) = 1 ?!
2. P(ξ=k) =  , k=0, ∞ Пуассона
3. p(x)=1/(b-a) на [a, b] Равномерное
4. p(x)=  Нормальное (m, σ)

Доказательство непрерывности Fξ(x) слева (см. выше):

Пусть {yN} неубывает и -> x0. Тогда ∃ последовательность вложенных событий:

(ξ < yN) ⊂ (ξ < yN+1) ..., ∪n=1,∞ (ξ < yN) = (ξ < x0)

lim P(ξ < yN) = P(ξ < x0) => F(x) = F(x0)

**26. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол**

Задача: Вычислить определенный интеграл I = 

Заменяется конечной суммой   - квадратурная формула

Сk - коэффициенты квадратурной формулы, xK - узлы квадратурной формулы.

 - погрешность квадратурной формулы

Введем на [a, b] равномерную сетку 

 Строим квадратичные формулы для 

**1) Формула прямоугольников**



, где  при 



**2) Формула трапеций**

, получается путем замены  интерполяционным многочленом первой степени, построенным по узлам  т.е. функцией





  => || M2i/12

  = h(0.5f(x0) + f(x1) + f(x2) + ... + f(xN-1) + 0.5f(xN))

-- составная формула трапеций  /12 = 

**3) Формула Симпсона (парабол)**

Обозначим:

Ln = = - Интерполяционный полином в форме Лагранжа, где

 ,  f(x) - Ln = 

В формуле Cимпсона:

f(x) L2 {  +  +  } =

= { f(xi-1) - 2 f(xi-1/2) + f(xi) } 



=> 

 = 

|| M4i/2880 , || M4/2880

Для любого многочлена 3-й степени:

,

где 

ri(x) = f(x) - H3(x), где H3(x) - многочлен эрмита 3-й степени;

H3(xi-1) = f(xi-1), H3(xi-1/2) = f(xi-1/2), H3(xi) = f(xi) и ****- !?**

**27. Методы Ньютона и секущих для решения нелинейных уравнений.**

1. Метод Ньютона

Опр. Корень *с* называется *изолированным* на сегменте , если *c* - внутренняя точка  и других корней на  нет.

Пусть надо найти корень уравнения , изолированный на сегменте .

Пусть *х0* - первое приближение.

Проводя касательные построим 

последовательность точек пересечения касательных с осью *Ох*.

Значения *хN* получаются по формуле:

 т.к. уравнение касательной в т

2. Метод Хорд

Уравнение хорды (секущей), проходящей через точки и  

Т.о. значения *хN* (т. пересечения хорд с осью *Ох*) получаются по формуле: 



3. Обоснование метода Ньютона и хорд

Пусть требуется найти решение уравнения . (\*)

Уравнение  сводится к (\*) путем замены . Тогда:

Опр. Последовательность  будем называть итерационной , если  выражается по рекурсивной формуле , а в качестве х0 взято  число из области определения .

Утв 1. Пусть  непрерывна на  и , тогда, если , то *с* является корнем уравнения (\*).

Доказательство: Так как непрерывна на .  по (\*) ! Таким образом: .

Утв 2. Пусть *с* - корень (\*), и пусть в -окрестности точки . Тогда итерационная последовательность т.  где  сходится к корню *с*.

Доказательство: Докажем, что  по индукции:

1. по условию.
2. Пусть . Тогда {по теореме Лагранжа} 

 т.о. и следовательно .

Более того: со скоростью, не ниже скорости геометрической прогрессии со знаменателем *a*.

Обоснование метода Ньютона

Пусть имеет на непрерывную и монотонную 1-ю производную, сохраняющую определенный знак.

Для определенности будем считать, что и  не убывает на .

f(x) = 0 <=> F(x) = x, где F(x) = x - f(xN)/f’(xN)

Покажем, что последовательность xN = F(xN-1) сходится к корню с, если х0 c.

1) Если х0  с, то хN  c

по индукции:

база индукции: x0 = b  c по условию

шаг индукции: xN - xN+1 = f(xN)/f’(xN) = {f(c) = 0} = (f(xN) - f(c))/f’(xN) = { Th. Лагранжа } = (xN - c)/ ,где   { монотонность производной }  хN - c => xN+1  c N

Т. о. последовательность  ограничена снизу. Покажем:

2)  - монотонна.

xN  c по 1) => {монотонность функции} => f(xN)  f(c)=0 => {f’(x) > 0} => xN - xN+1 = f(xN)/f’(xN)  0 => xN  xN+1

По 1), 2)  сходится как невозрастающая и ограниченная снизу последовательность.

По Утв. 1 предел  является корнем уравнения (\*). Все доказано.

Обоснование метода хорд

Пусть f’(x) на  непрерывна, монотонна и сохраняет определенный знак.

Для определенности будем считать, что f’(x) > 0 и не убывает.

f(x) = 0 <=> F(x) = x, где F(x) = x - 

xN+1 = xN - 

1) Если , то 

по индукции:

база индукции: x0 = a  c по условию шаг индукции:   {по теореме Лагранжа} 

,где { монотонность производной } 



Т. о. последовательность  ограничена сверху. Покажем:

2) - монотонна.

Т.к. , то  возрастает: xN  c  b => f(xN)  f(c)=0  f(b) => {из выражения для xN+1 - xN} => xN+1 - xN  0 => xN+1  xN

По 1), 2)  сходится как неубывающая и ограниченная сверху последовательность. По Утв. 1 предел  является корнем уравнения (\*). Все доказано.

**28.Численное решение задачи Коши для ОДУ Примеры методов Рунге-Кутта.**

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ:



Пусть непрерывна по *t* и в*.* Вудовлетворяет условию Липшица по *U:*

.

 решение при 

При исследовании численными методами решения задачи Коши будем предполагать, что решение  и обладает необходимыми свойствами гладкости*.*

Определение

1. - равномерная сетка с шагом .  
   Обозначение - приближенное решение (сеточная функция)
2. Фиксируем t и построим последовательность сеток и . Метод сходится в точке *t,* если  при*.*
3. Метод сходится на*,* если он сходится в *∀* точке
4. Метод имеет *p-*й порядок точности, если .
5. - погрешность метода.

1. Метод Эйлера.





*-* невязка или погрешность аппроксимации разностного уравнения на ???



1. Разностный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если при .
2. Разностный метод имеет *p* - й порядок аппроксимации, если .

т.к. то , т.е. метод Эйлера имеет 1-й порядок аппроксимации.

2. Симметричная схема.



*-* неявный метод.

 , т.е. имеет 2-й порядок аппроксимации.

3. Методы Рунге-Кутта.

Явный m-этапный метод Рунге-Кутта:

Пусть  известны, задаются и 

и последовательно вычисляются функции:



Присхема Эйлера

При  















Если то имеем 1-ый порядок аппроксимации.

Если еще2-ой порядок аппроксимации.

Получили схему метода Рунге-Кутта 2-ого порядка:

При

При

Метод 3- его порядка:

4-ого порядка:    

29. Задача Коши для уравнения колебания струны. формула Даламбера

 Уравнение характеристики:    Сделаем замену переменных:

; 

; 

 решение 

Т.о.  решение уравнения = 0 м.б. представлено в виде (\*\*), т.е. есть функции  - общий интеграл уравнения Найдем функции :





  - формула Даламбера

Если в формуле Даламбера - дважды непрерывно дифференцируема, - непрерывно дифференцируема, удовлетворяют уравнению и краевым условиям  решение, определяемое формулой Даламбера.

**30. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных для решения 1-ой краевой задачи.**

 стержень

*-*температура в сегменте с координатами *x* во время *t.* С боковых сторон стержень теплоизолирован.

Уравнение теплопроводности описывает процесс распространения тепла в твердом теле.

*-* плотность тепловых источников *,* *-* коэффициент температуропроводности

*-* удельная теплоемкость *, k-* коэффициент теплопроводности

*ρ -* плотность.



Одномерное уравнение теплопроводности: краевые условия

Основные краевые условия: 



Первая краевая задача









Вторая краевая задача



Задача Коши

* *



Определение: *-* решение 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности

*(1) - (4),* если

1. 
2. *(* непрерывность вторых производных по *x* и первых по *t)*
3. удовлетворяет *(1)-(4)*

По классическому определению, пусть нет 1-ого условия



Уравнению удовлетворяет, но это не разумное решение.

Метод разделения переменных

1)

**

Решение в виде*.* Подставляем

деля на

Для удовлетворяющих граничным условиям

*⇒* Для получаем задачу *Штурма-Лиувилля*. Для нее *λ* при которых ∃ нетривиальное решение- собственные значения задачи Штурма-Лиувилля. А соответствующая *-* функция задачи Штурма-Лиувилля.

У такой задачи бесконечно много собственных значений и собственных функций Пусть 

*-* символ Кронекера

Теперь уравнение дляпри известном *λ:*



Следовательно

*-* решение уравнения *(1) и (2) и (3)*



Предполагая, что нужные условия выполнены.

Обеспечим выполнение (4)

умножим наи

Надо найти *.*



, т.е*. * являются коэффициенты ряда Фурье



Разложим в Фурье по *sin*

Получим

Теорема (о существовании)

Пусть функция *и*  у задачи *(1)- (4)* существует решение

( классическое) определяемое формулой (5).